

Fibonacci 序列构造广义 M-J 混沌分形图谱 周期性的研究

刘鸿雁¹⁾ 隋涛^{1),3)} 徐喆²⁾ 朱伟勇²⁾

¹⁾(辽宁科技大学研究生部,鞍山 114044) ²⁾(东北大学计算中心,沈阳 110004)

³⁾(沈阳理工大学信息科学与工程学院,沈阳 110168)

摘要 为更好的研究 M-J 混沌分形图谱的周期性,首先利用旋转逃逸时间算法绘制了正整数阶复映射的广义 M-J 混沌分形图谱,然后分析了广义 Mandelbrot 集(M-集)周期芽苞的分布规律,并验证了广义 M-集周期芽苞存在 Fibonacci 序列拓扑不变性的规则;最后通过大量计算机数学实验,找出了 M-集参数平面与动力平面上相应的 Julia 集图像结构之间的对应关系,同时给出了广义 M-J 集周期轨道的计算公式。

关键词 Fibonacci 序列 广义 M-J 集 旋转逃逸时间算法 拓扑不变性 周期芽苞

中图分类号: TP301.5 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2008)02-0536-05

Research on Periodicity of General M-J Chaos-fractal Images Generated by Fibonacci Sequence

LIU Hong-yan¹⁾, SUI Tao^{1),3)}, XU Zhe²⁾, ZHU Wei-yong²⁾

¹⁾(School of Electronic and Information Engineering, Anshan University of Science and Technology, Anshan 114044)

²⁾(Computation Center, Northeastern University, Shenyang 110004)

³⁾(School of Information Science and Engineering, Shenyang University of Science and Technology, Shenyang 110168)

Abstract For researching on periodicity of M-J of Chaos-fractal images, Firstly, a series positive-integer-ordered M-J Chaos-fractal images of the complex mapping are drawn with rotating escape time algorithm. Secondly, the distribution of general Mandelbrot set(M-set) period-buds are analyzed. The topological invariance on the periodic buds fibonacci sequences in the general M-set are validated. With lots of computer mathematical experiments, In the end, the correspondence is discovered between the M-set parameter plane and Julia set images on the kinetic plane. And the formula on periodic orbits of general M-J set is presented.

Keywords Fibonacci sequences, general M-J set, rotation escape time algorithm, topological invariance, periodic buds

1 引言

混沌分形理论是研究自然界非线性过程复杂系统内在随机性所具有的特殊规律的一门新兴学科。自从美国科学院院士 Mandelbrot 发表了著名的“The Geometry of Nature”^[1]之后,复动力系统的研究一直是学术研究的热点,其中由复映射 $z^2 + c$ 所构造的 Mandelbrot 集被国际学术界公认为“最复杂、最难解

的科学问题之一”。如今,利用计算机通过复迭代运算,可以产生美丽而复杂的混沌分形图案。由于 M-集是具有无穷嵌套结构的紧集,在 M-集中隐含了另一族具有无穷嵌套结构的连通的 Julia 集(J-集),所以 M-集是相应的 J 集的微缩字典^[2],简记为 M-J 混沌分形图谱。它的研究受到各国学者的高度重视,已成为目前国际学术界的研究热点问题之一^[3,4]。

作者研究了国外学者 Mandelbrot, Gujar, Shirriff

等人在“M-J 混沌分形图谱”方面的研究工作,并结合陈宁、刘向东、朱伟勇等学者在文献[5]~[8]中提出的关于用 $z^n + c (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$ 构造 M 集混沌分形图谱的图像特征及周期芽苞序列分布的研究成果后,又通过大量的计算机数学实验,发现了高阶广义 M-集图像上的周期芽苞序列存在 Fibonacci 序列拓扑规律以及与广义 M-J 集混沌分形图谱之间存在联系,并给出了对应计算周期的 PNO 公式^[7]和图像例证,从而进一步表明了广义 M-集是相应 J-集的所谓字典的结构特征。

M-集周期芽苞的无穷嵌套结构是复动力系统的重要研究课题,因为它描述了 M-J 集之所以产生无穷复杂规律的原因与方式。由于广义 M 集是存在周期芽苞的,因此证明 Fibonacci 序列是通向混沌的又一途径。

2 基本概念

定义 1 使复映射 $f: z \leftarrow z^n + c (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$ 所生成的序列 $\{c, c^n + c, (c^n + c)^n + c, \dots\}$ 保持有界的复数 C 的集合称为一类广义 Mandelbrot 集,即 $M = \{c \in \mathbf{C} \mid c, c^n + c, (c^n + c)^n + c, \dots \text{有界}\}$,通常把 $n = 2$ 时,取 $z_0 = 0$,使由复映射 $f: z \leftarrow z^2 + c$ 产生的序列 $\{c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots\}$ 保持有界的参数平面上的复数 C 的集合称为经典的 Mandelbrot 集,简记为 M-集。

定义 2 若使复映射 $f: z \leftarrow z^n + c (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$, F_f 表示复数 C 中那些动力平面上轨道不趋于无穷点的点集合,即 $F_f = \{z \in C \mid \{f^n(z)\}_{n=1}^{\infty} \text{有界}\}$,则称此集为相应于 f 的充满的广义 Julia 集, F_f 的边界称为 f 的广义 Julia 集,记为 J_f 。

定义 3 $\forall x_0 \in M$,如果 s 是使 $f^s(x_0) = x_0$ 成立的最小正整数,则称 x_0 为广义 M-集的 s 周期点,而将具有相同周期数的点的不同单连通区域称为广义 M-集的周期芽苞。

定义 4 令 $I_j (j = 1, 2, \dots)$ 表示吸引周期为自然数倍数的芽苞序列的集合,即 $j = 1$ 时, I_1 表示序列 $\{1, 2, 3, \dots\}$; $j = 2$ 时, I_2 表示序列 $\{2, 4, 6, \dots\}$ 。

3 广义 M-集周期芽苞的 Fibonacci 序列

定义 5 广义 Fibonacci 序列 $\{F_n\}$ 满足下式:

$$\begin{cases} F_0 = a & (a, b \text{ 为任意非负整数}) \\ F_1 = b \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1)$$

图 1 中以 2 和 5 阶为例,显示了广义 M-集中的自然数序列和 Fibonacci 序列,可见,只要给定两个满足式(1)的初值,就可以生成一系列周期芽苞,而利用差分方程则可以求出广义 Fibonacci 序列的通项公式^[9]:

$$F_n = \frac{a(\sqrt{5}-1) + 2b}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{a(\sqrt{5}+1) - 2b}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (2)$$

从而求出

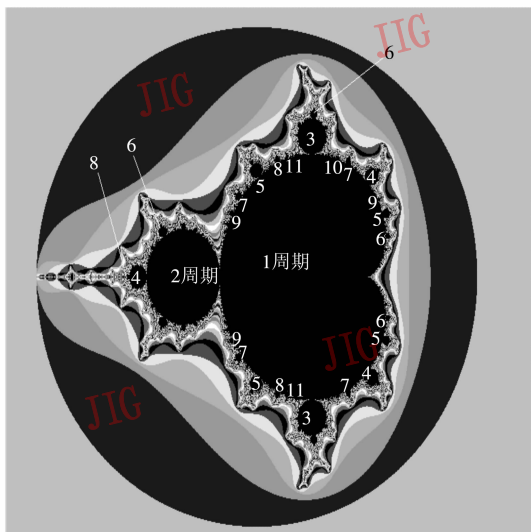
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (3)$$

笔者发现,对于广义高阶 M-集,随着周期的增加,相邻两项周期芽苞的周期数的比值趋于黄金中值周期性,这就是 M-集的自相似性,黄金中值为其自相似比例因子。广义正整数阶复映射 $f: z \leftarrow z^n + c (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$ 无论迭代多少次,最终满足 Fibonacci 序列的周期芽苞被保留下来,这不仅说明 Fibonacci 序列是构成混沌分形图谱的本质,同时也揭示了混沌分形图谱拓扑不变性的规律。伴随着周期的增加,周期芽苞的周期数可表示为:有理数 \rightarrow 无理数 \rightarrow 周期芽苞 Fibonacci 序列极限奇怪吸引子(混沌运动),它是最多去掉一个由中性点或密支凯维茨点(Misiurewicz point)构造的测度为零的点的集合。

经实验证明,广义正整数阶复映射 $f: z \leftarrow z^n + c (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$ 在每个周期芽苞的边缘附近,处于混沌状态,如何解释这些边缘混沌带产生的原因,目前国际学术界对此问题尚无定论,作者提出的 Fibonacci 序列为解决此问题提供了一条新思路。Fibonacci 序列所构造的 M-集为

$$M = \lim_{n, t \rightarrow \infty} \cup F_n^t \quad (4)$$

式中, F_n 表示任意的 Fibonacci 序列,指数 t 表示不同的 Fibonacci 序列的代号,即 M-集由一系列的 Fibonacci 序列的并集构成。经大量计算机数学实验可知,任意相邻两个周期芽苞 F_n 和 F_{n+1} 之间会生出芽苞 F_{n+2} ,且周期数满足 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$,如图 1(b)所示,在第 1 自然数序列的 2 周期和 3 周期芽苞之间包含的 Fibonacci 序列中,靠近 2 周期的序



(a) M-集周期芽苞序列分布

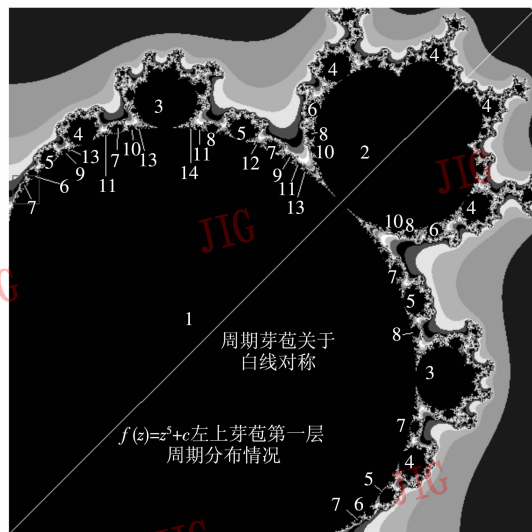
(b) $n=5$ 广义 M-集花瓣周期芽苞序列分布

图 1 广义 M-集周期芽苞拓扑嵌套分布图像

Fig. 1 Topological periodic buds of M set chaos-fractal images

列为 $\{5, 7, 9, 11, \dots\}$, 靠近 3 周期的序列为 $\{5, 8, 11, 14, \dots\}$, 其中自然数序列 I_p 和 Fibonacci 序列又会有重复的周期芽苞, 每一序列之间又会满足 Fibonacci 序列规律, 由此反复最终就构成了广义的 M-集周期分布规律(见图 1(a))。

4 广义 M-J 混沌分形图对应关系

通过前面的讨论可以知道, 广义的 M-集是由自然数序列 I_p 和 Fibonacci 序列相互作用形成的。例如图 1(a) 中, 首先在 2 周期和 3 周期之间有一个首项为 5 的周期芽苞, 然后向 2 周期方向形成了一个公差为 2 的等差数列 $\{5, 7, 9, 11, \dots\}$, 而靠近 3 周期芽苞的方向则形成了一个公差为 3 的等差数列 $\{5, 8, 11, 14, \dots\}$ 。另外, 通过实验发现, 对比 M-J 集分形图可知, 每个 J-集将产生分岔多重连级现象, 每个分岔点又有 m 个分支。本文用 k_i 表示第 i 个分岔点的分支数目, i 也表示参数 c 在广义 M-集的第 i 个嵌套层次。

有了如上约定, 即可通过大量计算机数学实验来猜测如下广义 M-J 集对应关系的规律:

(1) M-集不同的周期芽苞嵌套层次对应 J-集各重分岔。M-集每经过一次周期芽苞嵌套, 相应的 J-集由外向里将产生一重分岔, 第 i 分岔点的分支数 k_i 对应 M-集等差数列的第 k_i 项。

(2) 若复映射的阶数为 $n(n \in \mathbb{N})$, 则其与 M-集参数 c 对应的 J-集图像有 n 条完全对称的分支。

(3) J-集图像结构与吸引轨道周期数(PNO)之间的对应关系为

$$PNO = \prod_{i=1}^n k_i \quad (5)$$

其中, PNO 表示参数 c 的(也是其 J-集的)吸引轨道周期数。

(4) 与 J-集各重分岔对应的 M-集有不同的周期芽苞嵌套层次, 第 i 分岔点所对应的周期芽苞 h_i (h_i 表示周期数) 规定, 如果 J-集图像没有分岔点, 即是一个闭合的不规则圈形, 若其对应 1 周期芽苞 ($h_0 = 1$), 则 h_i 与 k_i 有如下关系:

$$h_i = PNO = h_{i-1} \cdot k_i (h_0 = 1) \quad (6)$$

由式(2)和式(3)可以看出, 式(5)和式(6)等价。表 1 和图 2 给出了广义 M-J 混沌分形图的对应关系。

表 1 中各参数 c 所对应的广义 Julia 集分形图像如图 2 所示。

5 结论

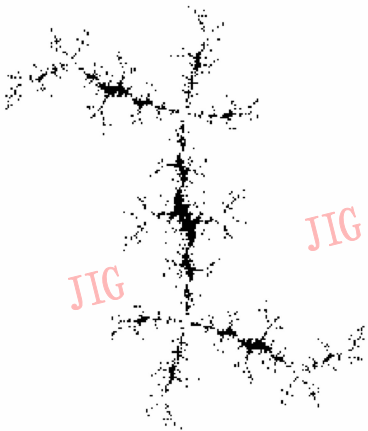
(1) 在广义 M-集周期芽苞的每个完整花瓣上(包括主花瓣和芽苞上的小花瓣)都有两个以自然数倍数为吸引周期的芽苞序列。

(2) 大量的计算机数学实验结果表明,

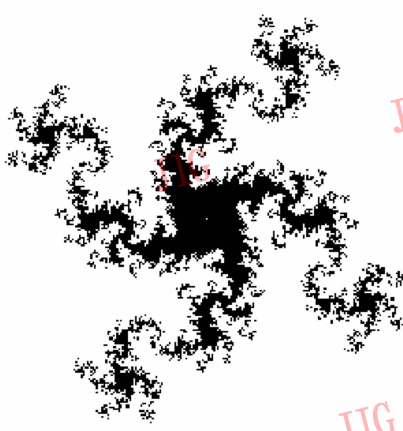
表 1 高阶广义 M-集上构造 Julia 集的参数 c 对应关系

Tab. 1 The correspondence between Julia set and general high order M set

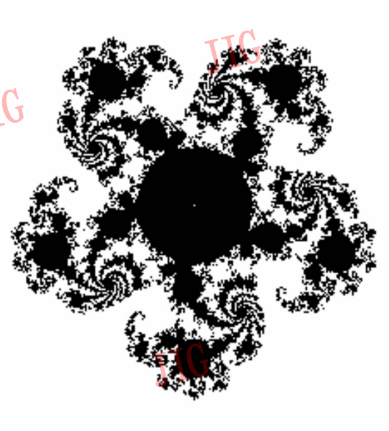
图号	阶数 n	参数 c	M-集周期芽苞的位置	J-集的吸引轨道周期数 PNO
4(a)	2	$0.328\ 500 + 0.574\ 500i$	1 周期 $\rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$	$4 \times 2 \times 5 = 40$
4(b)	4	$0.288\ 640 + 0.847\ 360i$	1 周期 $\rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 2$	$2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$
4(c)	5	$0.0191\ 40 + 0.585\ 660i$	1 周期 $\rightarrow 8 \rightarrow 3$	$8 \times 3 = 24$
4(d)	7	$-0.595\ 840 + 0.585\ 728i$	1 周期 $\rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 2$	$3 \times 2 \times 2 = 12$
4(e)	9	$-0.498\ 400 + 0.519\ 040i$	1 周期 $\rightarrow 6 \rightarrow 2$	$6 \times 2 = 12$
4(f)	12	$-0.838\ 240 - 0.177\ 760i$	1 周期 $\rightarrow 3 \rightarrow 3$	$3 \times 3 = 9$



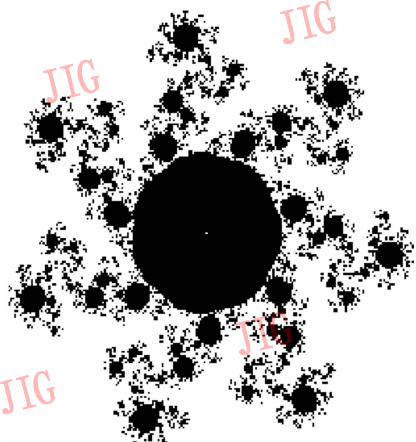
(a) $n = 2, c = 0.328\ 500 + 0.574\ 500i$, $PNO = 4 \times 2 \times 5 = 40$ 分形图



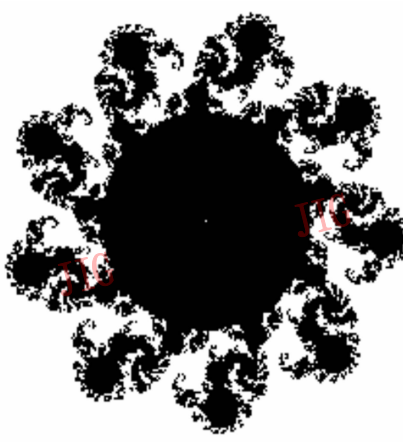
(b) $n = 4, c = 0.288\ 640 + 0.847\ 360i$, $PNO = 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$ 分形图



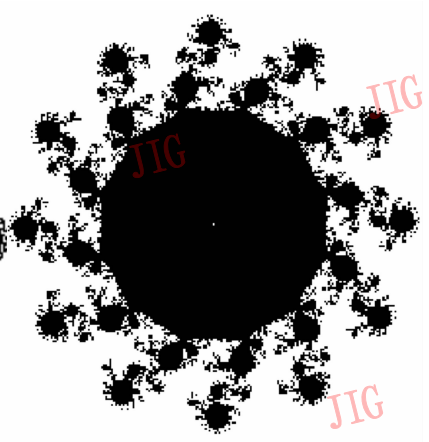
(c) $n = 5, c = 0.019\ 140 + 0.585\ 660i$, $PNO = 8 \times 3 = 24$ 分形图



(d) $n = 7, c = -0.595\ 840 + 0.585\ 728i$, $PNO = 3 \times 2 \times 2 = 12$ 分形图



(e) $n = 9, c = -0.498\ 400 + 0.519\ 040i$, $PNO = 6 \times 2 = 12$ 分形图



(f) $n = 12, c = -0.838\ 240 - 0.177\ 760i$, $PNO = 3 \times 3 = 9$ 分形图

图 2 高阶广义 M-集上构造的 J-集混沌分形图

Fig. 2 J set chaos-fractal images constructed by general high order M set chaos-fractal

Fibonacci 序列是构成混沌分形图谱的本质,其既验证了正整数阶广义 M-集具有自相似特征,同时也揭示了混沌分形图谱拓扑不变性的内在规律。

(3) 本文给出的图表数据说明了正整数阶广义

M-J 混沌分形图之间相互对应的规律,并在文献[7]和文献[8]基础上,进一步验证了关于 J-集吸引轨道周期数的递推公式,从而为更好地研究广义 M-J 混沌分形图谱提供了有利的借鉴。

参考文献 (References)

- 1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. San Francisco, CA, USA: Freeman W H, 1982: 1 ~ 10.
- 2 Peigen H O, Saupe D. The Science of Fractal Images[M]. Berlin, German: Spring-Verlag, 1988: 137 ~ 218.
- 3 Rojas Raul. A tutorial on efficient computer graphic representation of the Mandelbrot set[J]. Computers & Graphics, 1991, **15**(1): 91 ~ 100.
- 4 Hao Bai-lin. Starting with Parabolas—An Introduction to Chaotic Dynamics[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1993 (in Chinese) [郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1993.]
- 5 Liu Xiang-dong, Zhu Wei-yong. Composed accelerated escape time algorithm to construct the general Mandelbrot sets [J]. Fractal, 2001, **9**(2): 149 ~ 153. [刘向东, 朱伟勇. 组合加速逃逸时间算法构造广义 Mandelbrot 集[J]. 分形, 2001, **9**(2): 149 ~ 153.]
- 6 Zhu Wei-yong, Song Chun-lin, Deng Xue-gong, et al. The M-J chaotic fractal images of $z^{-2} + c$ generated by the fibonacci sequence and the scaling invariance[J]. Chinese Journal of Computers, 2004, **27**(1): 52 ~ 57. [朱伟勇, 宋春林, 邓学工等. Fibonacci 序列构造 $z^{-2} + c$ 广义 M-J 混沌分形图谱及其标度不变性的研究[J]. 计算机学报, 2004, **27**(1): 52 ~ 57.]
- 7 Chen Ning, Zhu Wei-yong. M-J Chaos-fractal Images [M]. Shenyang: Publisher of Northeastern University, 1998. [陈宁, 朱伟勇. M-J 混沌分形图谱[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 1998.]
- 8 Zhu Wei-yong, Zhu Zhi-liang, Liu Xiang-dong, et al. A series conjectures of M-J chaos-fractal image construction by the periodic buds fibonacci sequence [J]. Chinese Journal of Computers, 2003, **26**(2): 221 ~ 226. [朱伟勇, 朱志良, 刘向东等. 周期芽苞 Fibonacci 序列构造 M-J 混沌分形图谱的一族猜想[J]. 计算机学报, 2003, **26**(2): 221 ~ 226.]
- 9 Zhu Zhi-Liang, Cao Lin, Zhu Wei-yong, et al. Scaling invariance of M-J chaos-fractal images[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2002, **23**(4): 307 ~ 310. [朱志良, 曹林, 朱伟勇等. 广义 M-集周期芽苞 Fibonacci 序列的拓扑不变性[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2002, **23**(4): 307 ~ 310.]